

مبانی علم حساب

-
- سرشناسه: فرگه، گوتلوب، ۱۸۴۸-۱۹۲۵ م.
- عنوان و نام پدیدآور: مبانی علم حساب: پژوهشی منطقی-ریاضیاتی درباره مفهوم عدد/ فریدریش لودویگ گوتلوب فرگه؛ ترجمه طالب جابری.
- وضعیت ویراست: [ویراست ۲].
- مشخصات نشر: تهران: ققنوس، ۱۳۹۸.
- مشخصات ظاهری: ۱۶۶ ص.: مصور، جدول.
- شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۰۴-۰۳۱۴-۲
- وضعیت فهرست نویسی: فیبا
- یادداشت: عنوان اصلی: Grundlagen der Arithmetik.
- یادداشت: چاپ دوم.
- یادداشت: کتابنامه.
- عنوان دیگر: پژوهشی منطقی-ریاضیاتی درباره مفهوم عدد.
- موضوع: اعداد، مفهوم
- Number concept
- موضوع: حساب - اصول
- موضوع: Arithmetic -- Foundations
- شناسه افزوده: جابری، طالب، ۱۳۶۵-، مترجم
- رده بندی کنگره: QA۹
- رده بندی دیویی: ۵۱۳
- شماره کتاب شناسی ملی: ۵۹۱۸۰۰۳
-

مبانی علم حساب

پژوهشی منطقی-ریاضیاتی

درباره مفهوم عدد

(ویرایش جدید)

فریدریش لودویگ گوتلوب فرگه

ترجمه طالب جابری



این کتاب ترجمه‌ای است از:

Die Grundlagen der Arithmetik

*Eine logisch mathematische Untersuchung
über den Begriff der Zahl*

Dr. G. Frege

Breslau, Verlag von Wilhelm Koebner, 1884

و مقابله شده با

The Foundations of Arithmetic

A Logico-mathematical enquiry into the concept of number

Gottlob Frege

Translated by J. L. Austin

Harper and Brothers, New York, 1960



انتشارات قنوس

تهران، خیابان انقلاب، خیابان شهدای ژاندارمری،

شماره ۱۱۱، تلفن ۴۰ ۸۶ ۴۰ ۶۶

ویرایش، آماده‌سازی و امور فنی:

تحریریه انتشارات قنوس

* * *

فریدریش لودویگ گوتلوب فرگه

مبانی علم حساب

پژوهشی منطقی-ریاضیاتی درباره مفهوم عدد

ترجمه طالب جابری

چاپ دوم

(ویرایش جدید)

۷۷۰ نسخه

۱۳۹۸

چاپ رسام

حق چاپ محفوظ است

شابک: ۲ - ۰۳۱۴ - ۰۴ - ۶۲۲ - ۹۷۸

ISBN: 978 - 622 - 04 - 0314 - 2

www.qoqnoos.ir

Printed in Iran

۱۸۰۰۰ تومان

فهرست

یادداشت مترجم فارسی	۷
مقدمه	۱۱
بخش اول: دیدگاه‌های چند نویسنده درباره ماهیت گزاره‌های	
حسابی	۳۰
بخش دوم: دیدگاه‌های چند نویسنده درباره مفهوم عدد	۵۳
بخش سوم: دیدگاه‌هایی درباره یکان و یک	۷۰
بخش چهارم: مفهوم عدد	۱۰۳
بخش پنجم: نتیجه‌گیری	۱۴۰
یادداشت‌های مترجم انگلیسی	۱۶۵

یادداشت مترجم فارسی

کتاب مبانی علم حساب در سال ۱۸۸۴ چاپ شده است و فرگه در آن به بررسی مبانی فلسفی علم حساب و بالاخص عدد می‌پردازد. برخلاف کتاب مفهوم‌نگاشت، در این جا خبری از زبان صوری نیست. چنان‌که خود فرگه می‌گوید، تکلیف این کتاب این است که یا عدد را تعریف کند یا تعریف‌ناپذیری آن را آشکار سازد. او پس از عنوان کردن این پرسش که «عدد یک چیست؟»، به بررسی و نقد عقاید دیگر ریاضیدانان و فلاسفه دربارهٔ چیستی عدد پرداخته است و دیدگاه خود را بیان می‌کند.

آنچه فرگه بیش از همه با آن مخالفت می‌کند دیدگاهی روان‌شناختی است که در آن اعداد با تصورات ذهنی مرتبط دانسته می‌شوند. تحت تأثیر انتقادات فرگه بود که هوسرل موضع روان‌شناختی خود را تغییر داد. او که تصمیم دارد مبانی علم حساب را بر اساس قوانین منطق توضیح دهد، قائل به تمایزی اساسی میان منطق و روان‌شناسی است. «آیا بنیان علم حساب ژرف‌تر از همهٔ علوم تجربی، و حتی ژرف‌تر از هندسه نیست؟ حقایق حسابی قلمرو هر آنچه را قابل شمارش است در بر می‌گیرند. این گسترده‌ترین قلمروست؛ زیرا نه تنها امر واقعی و نه تنها امر

شهودی، بلکه هر آنچه اندیشیدنی است، به آن تعلق دارد. بنابراین، آیا نباید قوانین اعداد ارتباط بسیار نزدیکی با قوانین تفکر داشته باشند؟^۱ بنا به عقیده فرگه، اعداد ماهیاتی عینی (یا برابریستاهایی اُبژکتیو) و مستقل از تصورات و فرایندهای ذهنی ما هستند. البته عینی را نباید به معنای فیزیکی فهمید. عدد ۵ برخلاف رنگ آبی صفتی از اشیای بیرونی نیست و البته این به معنای ذهنی بودن آن نیز نیست.

مایکل دامت، از شارحان برجسته فرگه، این کتاب را قوی‌ترین و سرشارترین اثر فلسفی فرگه می‌داند. با این همه، مبانی علم حساب همانند دیگر آثار فرگه در ابتدا با استقبال چندانی روبه‌رو نشد، تا این‌که نظر برتراند راسل را به خود جلب کرد. نظریه مجموعه‌های راسل حاصل تشخیص نقصی در کار فرگه بود. در حقیقت، منطوق‌گرایی فرگه در این اثر را می‌توان نقطه آغازی برای فلسفه ریاضی و تحلیل او از زبان را نقطه آغازی برای فلسفه تحلیلی دانست.

از آنجایی که به عقیده بسیاری فرگه پدر فلسفه تحلیلی است، جای خالی آثار او به زبان فارسی احساس می‌شود. ترجمه‌ای که پیش روی شما عزیزان است، بر اساس متن آلمانی آن و همچنین ترجمه انگلیسی تحسین برانگیز جی. ال. آستین انجام گرفته است. در مواردی که فرگه به تحلیل‌هایی پرداخته که ارتباط زیادی با معانی مختلف واژه‌ها یا ساختار دستوری خاص زبان آلمانی داشته‌اند، اصل واژه‌ها یا جملات آلمانی را به صورت پانوشته آورده‌ام تا خواننده درک بهتری از بحث او داشته باشد. نکته‌ای که باید به خاطر سپرد این است که از اصطلاحات مهمی که فرگه به کار گرفته، همچون «این‌همانی»، «عینیت»، «مفهوم»، «دنباله» و ...، آن معنایی را بفهمیم که خود او در همین کتاب برای آن‌ها در نظر می‌گیرد.

توضیحات مترجم انگلیسی که ایشان آن‌ها را در قلاب گذاشته بود، در ترجمه فارسی با شماره‌های داخل پرانتز و به صورت مسلسل مشخص شده و در انتهای کتاب با عنوان «یادداشت‌های مترجم انگلیسی» آمده است و پانوشته‌های نویسنده آلمانی با ستاره مشخص شده و سایر پانوشته‌ها مربوط به مترجم فارسی است. همچنین توضیحاتی که برای فهم بهتر متن در قلاب قرار دارند از مترجم فارسی هستند و توضیحاتی که در پانوشته‌های نویسنده آلمانی در قلاب قرار گرفته‌اند از مترجم انگلیسی است. مترجم انگلیسی برخی از منابع و نقل قول‌هایی را که گاهی دقیق نبوده‌اند تصحیح کرده است که ما نیز آن‌ها را به همان شکل در ترجمه فارسی آورده‌ایم.

از دکتر محمدعلی عبداللہی که این حقیر را پیوسته به ترجمه این کتاب تشویق می‌کرد و از راهنمایی‌های راهگشای خود دریغ نمی‌نمود کمال تشکر را دارم. همچنین از مهندس احمد جابری که بیش از نیمی از این ترجمه را با ترجمه آستین مقابله نمودند و دکتر آسیه جعفری که زحمت بازخوانی ترجمه نهایی را متقبل شدند سپاسگزارم. در پایان از کارکنان محترم انتشارات ققنوس، به‌ویژه مدیرمسئول آن جناب آقای حسین‌زادگان که تلاش صادقانه‌ای در جهت روشن نگه داشتن چراغ دانش و فرهنگ دارند، قدردانی می‌نمایم.

مقدمه

هنگامی که از کسی می پرسیم عدد یک چیست، یا نشانه^۱ به چه دلالت می کند،^۲ و^(۱) معمولاً این پاسخ را می شنویم: خوب، یک شیء. و اگر ادامه دهیم و اشاره کنیم که گزاره

«عدد یک، یک شیء است»^۳

یک تعریف نیست، زیرا در یک سوی آن حرف تعریف معین و در سوی دیگرش حرف تعریف نامعین قرار دارد، یا این که اشاره کنیم که این گزاره تنها می گوید که عدد یک به اشیا تعلق دارد، اما نمی گوید که کدام شیء است، بدین ترتیب احتمالاً از ما خواسته می شود که به دلخواه شیئی را انتخاب کنیم و آن را [عدد] یک بخوانیم. اما اگر هر کسی حق داشت از این نام هر چه را که خود دوست دارد بفهمد، آنگاه گزاره ای یکسان درباره [عدد] یک، دلالت های مختلفی برای افراد مختلف می داشت؛ یعنی برای چنین

۱. Zeichen (symbol): ما واژه Zeichen را به «نشانه» و symbol را به «نماد» برگردانده ایم.

هرچند به نظر نمی رسد در این کتاب فرگه میان آن ها تمایزی نهاده باشد.

۲. ما Bedeutung را «دلالت» و Sinn را «معنا» ترجمه می کنیم.

3. die Zahl Eins ist ein Ding (the number one is a thing)

گزاره‌هایی محتوای^۱ یکسانی وجود نمی‌داشت. برخی ممکن است از پاسخ به این پرسش سر باز زنند، با این استدلال که نمی‌توان گفت حرف a نیز، آن‌گونه که در علم حساب از آن استفاده می‌شود، بر چه دلالت می‌کند؛ و اگر بگوییم « a بر یک عدد دلالت می‌کند»، همان اعتراض‌هایی برانگیخته می‌شود که تعریف «عدد یک، یک شیء است» در پی داشت. حال در مورد حرف a کاملاً درست است که چنان پرسشی را نپذیریم: a بر عددی معین و مشخص دلالت نمی‌کند، بلکه برای بیان کلیت^۲ گزاره‌ها به کار می‌رود. اگر به جای a در $a + a - a = a$ عددی قرار دهیم، حال هر عددی که باشد، البته به شرط تغییر ندادن آن، همواره یک این‌همانی^(۲) صادق خواهیم داشت. حرف a در چنین معنایی به کار می‌رود. اما عدد یک وضعیت کاملاً متفاوتی دارد. آیا می‌توان در این‌همانی $1 + 1 = 2$ به جای ۱ در هر دو مورد، یک شیء، مثلاً ماه را قرار داد؟ برعکس، به نظر می‌رسد به جای اولین ۱ هرچه قرار دادیم، به جای دومین ۱ باید چیز دیگری قرار دهیم. چرا در این جا باید کاری را انجام دهیم که در مورد قبلی کاملاً اشتباه بود؟ علم حساب تنها با حرف a سروکار ندارد، بلکه باید از حروف دیگری مانند b ، c و غیره نیز استفاده کند تا روابط میان اعداد مختلف را به صورت کلی بیان نماید. بنابراین، طبیعی است فرض کنیم که نشانه ۱ نیز، اگر بنا بود به همان نحو برای کلیت‌بخشی به گزاره‌ها به کار رود، به‌تنهایی نمی‌توانست بسنده باشد. اما آیا عدد یک شبیه به یک برابریستای^۳ معین با ویژگی‌های مشخص به نظر نمی‌رسد، مثلاً این ویژگی که اگر در خودش ضرب شود بدون تغییر باقی می‌ماند؟ به این معنا، a هیچ ویژگی مشخصی ندارد، زیرا هرچه درباره a بتوان گفت

1. Inhalt (content) 2. Allgemeinheit (generality)

۳. Gegenstand (object): ما واژه Gegenstand را به «برابریستا» و object را به «أبژه» برگردانده‌ایم.

ویژگی مشترک همه اعداد است، در حالی که $1 = 1^1$ نه درباره ماه چیزی می‌گوید، نه درباره خورشید، نه صحرای آفریقا، نه از قله جزیره تریف.^۱ زیرا معنای چنین اظهاراتی چه می‌توانست باشد؟

احتمالاً حتی بیشتر ریاضیدانان نیز آمادگی لازم را جهت ارائه پاسخی قانع‌کننده به چنین پرسش‌هایی ندارند. آیا ننگ نیست که علم ما تا این حد درباره اولین و قریب‌ترین برابریستایش، که به ظاهر ساده‌ترین آن‌ها نیز هست، مبهم باشد؟ توان ما برای گفتن این‌که عدد چیست، از این هم کمتر است. اگر مفهومی که در بنیاد یک علم سترگ قرار دارد با چنین مسائلی روبه‌رو شود، پس تکلیفی ضروری است که با دقت بیشتر آن را بکاویم و بر آن مسائل فائق آییم؛ به‌ویژه از این نظر که تا زمانی که بینش ما در خصوص بنیاد تمام ساختار علم حساب ناقص باشد، پیشرفتی در توضیح اعداد منفی،^۲ کسری^۳ و مختلط^۴ نخواهیم داشت.

البته خیلی‌ها فکر می‌کنند که این کار به زحمتش نمی‌ارزد. به نظر ایشان، این مفهوم به کفایت در کتب مرجع پایه بررسی و بدین ترتیب برای همیشه کنار گذاشته می‌شود. چه کسی ممکن است معتقد باشد که درباره موضوعی به این سادگی چیز بیشتری برای آموختن باقی مانده است! مفهوم عدد صحیح مثبت^۵ چنان خالی از اشکال به نظر می‌رسد که شرحی از آن که مناسب حال کودکان باشد می‌تواند هم علمی باشد و هم کامل؛ و هر دانش‌آموزی، بدون تأمل بیشتر یا آشنایی با آنچه دیگران درباره آن اندیشیده‌اند، هر آنچه را باید درباره آن بداند، می‌داند. بدین ترتیب نخستین پیش‌نیاز یادگیری – یعنی دانستن این‌که نمی‌دانیم – در این جا مفقود است. نتیجه این است که ما هنوز به خام‌ترین دیدگاه‌ها

۱. Teneriffa: شهری در اسپانیا.

2. negativen (negative) 3. gebrochenen (fractional)

4. complexen (complex) 5. positiven ganzen Zahl (positive whole number)

خشنودیم، در حالی که از زمان هربارت،* نظریه بهتری در دسترس بوده است. دیدن این که چگونه کشفیات یک دوره همواره با این خطر روبه‌رو هستند که به همین نحو از دست بروند، ناراحت‌کننده و دلسردکننده است. گویی این همه تلاش بیهوده بوده، زیرا خودمان را دارای چنان ثروتی تصور می‌کنیم که دیگر ضرورتی نمی‌بینیم تا ثمره‌های آن را برچینیم. کار من نیز، چنان‌که به‌خوبی آگاهم، با همین خطر روبه‌روست. آنگاه که می‌بینم محاسبه^۱ را «اندیشه مکانیکی تجمیعی»^۲ می‌خوانند،** خود را با گونه‌ای ناپختگی روبه‌رو می‌بینم. شک دارم چنین اندیشه‌ای وجود داشته باشد. تصور تجمیعی^۳ شاید وجود داشته باشد، اما این هیچ ربطی به محاسبه ندارد. اندیشه ذاتاً همه‌جا یکی است: چنین نیست که قوانین اندیشه بر حسب متعلقات مختلف اندیشه متفاوت باشند. تفاوت فقط در کمی و بیشی میزان محض بودن است، و همچنین میزان وابستگی به تأثرات روان‌شناختی و کمک‌های بیرونی به اندیشه همچون زبان و ارقام [یا عددنشانه‌ها]،^۴ و نیز تا حدودی در میزان ظرافت ساختار مفاهیم؛ اما دقیقاً از همین جهت است که ریاضیات مشتاق است از تمامی علوم حتی فلسفه فراگذرد.

از طریق نوشتار کنونی، این مطلب را درخواهید یافت که حتی

* «دو به معنی دو چیز نیست، بلکه یعنی دو برابر کردن» الی آخر:

Herbart, Collected Works, ed. Hartenstein, Vol. X, part i, *Umriss pädagogischer Vorlesungen*, § 252, n. 2.

1. Rechnen (calculation)

2. aggregatives, mechanisches Denken (aggregative mechanical thought)

** K. Fischer, *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, 2nd edn., § 94.

3. Aggregatives Vorstellen (aggregative imagination)

4. Zahlzeichen (numerals)

استنتاجی^۱ همچون $n+1$ از n ، که در ظاهر کاملاً ویژه ریاضیات است، بر قوانین کلی منطقی استوار است و نیازی به قوانین خاص اندیشه تجمیعی نیست. البته این امکان هست که از ارقام به نحو مکانیکی استفاده کرد، همان‌گونه که می‌توان طوطی‌وار سخن گفت؛ اما این را به‌سختی بتوان اندیشه نام گذاشت. این امر صرفاً پس از آن امکانپذیر است که از طریق اندیشه واقعی^۲، زبان نمادهای ریاضی چنان شکل گرفته باشد که بتوان گفت این [نظام نمادهای ریاضی] به‌اصطلاح به جای ما می‌اندیشد. این بدان معنا نیست که اعداد به طریق مکانیکی ویژه‌ای شکل می‌گیرند، چنان‌که مثلاً ماسه‌ها از دانه‌های کوارتز ایجاد می‌شوند. به نظر من به نفع ریاضیدانان است تا با چنین دیدگاهی مخالفت کنند، زیرا به بی‌اعتباری یکی از برابریستاهای اصلی علم آن‌ها و نیز خودِ علمشان منجر خواهد شد. اما حتی در آثار ریاضیدانان نیز اظهاراتی از این سنخ یافت می‌شود. کاملاً به خلاف این، باید دانست که مفهوم عدد، در مقایسه با بیشتر مفاهیم مربوط به علوم دیگر، ساختار ظریف‌تری دارد، هرچند که با این همه از ساده‌ترین [مفاهیم] در علم حساب است.

حال برای از میان بردن این توهم که ما در مورد اعداد صحیح مثبت با هیچ مسئله‌ای روبه‌رو نیستیم و بلکه توافق عمومی راجع به آن‌ها حاکم است، لازم می‌بینم برخی دیدگاه‌های فیلسوفان و ریاضیدانان را درباره پرسش‌های مطرح‌شده بررسی کنم. روشن خواهد شد که میزان توافق آن‌ها چه اندک است، آن‌قدر اندک که یک رأی، رأی دیگر را کاملاً نقض می‌کند. برای نمونه، برخی معتقدند که «یکان‌ها [واحد‌ها] با هم این همان‌اند»^۳، برخی دیگر اما آن‌ها را متفاوت می‌دانند و هر دو طرف در

1. Schluss (inference) 2. wirkliches Denken (genuine thought)

3. die Einheiten sind einander gleich (units are identical with one another)

برای توضیحات بیشتر راجع به واژه Einheit نگاه کنید به بند ۲۹.

تأیید گفته خود براهینی می‌آورند که به سادگی نمی‌توان آن‌ها را رد کرد. من در این جا به دنبال بیدار کردنِ ضرورت انجام دادن پژوهشی دقیق‌تر هستم. همزمان قصد دارم با از پیش توضیح دادنِ نظرهایی که دیگران ابراز داشته‌اند، زمینه را برای دیدگاه خود مهیا سازم و از این طریق خواننده را از پیش متقاعد سازم که آن طرقِ دیگر به هدف خود نمی‌رسند و این‌که دیدگاه من تنها دیدگاهی در میان دیدگاه‌های دیگر – که همه به یک اندازه مقبولیت دارند – نیست؛ و بدین ترتیب امیدوارم سرانجام به پرسش مطرح شده، دست‌کم از حیث مؤلفه‌های اساسی‌اش، پاسخ دهم. البته توضیحات من در این جا بیش از آنچه ریاضیدانان روا می‌دارند فلسفی شده‌اند؛ اما هر پژوهش ژرفی در مفهوم عدد همواره تا حدودی فلسفی خواهد بود. این پژوهش تکلیفی مشترک میان ریاضیات و فلسفه است.

اگر همکاری میان این دو علم – علی‌رغم تلاش‌هایی چند از هر دو سو – چندان که انتظار می‌رفته و احتمالاً امکان آن وجود داشته ثمربخش نبوده است، به نظر من دلیل این امر غلبهٔ روش‌های روان‌شناختی استدلال بر فلسفه است که حتی در منطق نیز نفوذ کرده‌اند. ریاضیات هیچ میانه‌ای با چنین گرایش‌هایی ندارد و از همین جا بیزاریِ اغلبِ ریاضیدانان از ملاحظات فلسفی به‌خوبی آشکار می‌شود. هنگامی که برای نمونه استریکر^۱ * تصورات^(۳) اعداد را اموری موتوری^۲ [یا پدیده‌های حرکتی] و وابسته به تأثرات ماهیچه‌ای می‌داند، آنگاه ریاضیدان نمی‌تواند اعداد [مورد مطالعه] خود را در چنین جایی بازشناسد و نمی‌داند چگونه باید کارش را از چنین گزاره‌هایی آغاز کند. علم حسابی

1. Stricker * *Studien über Association der Vorstellungen*, Vienna, 1883.

2. motorisch (motor phenomena)

که بنیادش بر تأثرات ماهیچه‌ای نهاده شده باشد، قطعاً خود نیز کاملاً احساسی خواهد شد، و اما به اندازه بنیادش تیره و تار نیز خواهد بود. خیر؛ علم حساب نه با حواس هیچ کاری دارد و نه با تصاویر درونی^۱ که از آثار ادراکات حسی پیشین شکل گرفته باشند. آن عدم تعین و ناپایداری که در تمامی این مراحل یافت می‌شود، با تعین و ثباتی که در مفاهیم و برابریستاهای ریاضیات وجود دارد، در تناقضی آشکار است. شاید تأمل بر تصورات و تبدلات آن‌ها، که هنگام اندیشیدن ریاضیاتی اتفاق می‌افتد، بی‌فایده نباشد، اما روان‌شناسی نباید گمان کند که [چنین تأملی] می‌تواند در بنیانگذاری علم حساب نقشی داشته باشد. ریاضیدانان در این مقام علاقه‌ای به این تصاویر درونی، خاستگاه و دگرگونی‌هایشان ندارند. استریکر خود می‌گوید که از کلمه «صد»^۲ هیچ تصور دیگری غیر از نشانه ۱۰۰ ندارد. دیگران ممکن است تصور حرف C یا چیز دیگری را داشته باشند؛ آیا از این جا نمی‌توان نتیجه گرفت که این تصاویر درونی، تا جایی که به ماهیت موضوع ما مربوط می‌شود، بی‌اهمیت و عارضی^۳ اند، همان اندازه عارضی که تخته سیاه و قطعه‌ای گچ، و به طور کلی شایسته این نیستند که تصور عدد صد خوانده شوند؟ بنابراین، نباید ماهیت موضوع مورد بحث را در این جا جستجو کرد. هرگز نباید شرح خاستگاه یک تصور را به جای یک تعریف نهاد، یا بیان آن شرایط روانی^۴ و فیزیکی^۵ را که ما از طریق آن‌ها از یک گزاره آگاه می‌شویم، در مقام اثباتی برای آن به حساب آورد، یا میان اندیشیده شدن^۶ [یا متعلق اندیشه واقع شدن] یک گزاره و صدق^۷ آن خلط کرد! به نظر می‌رسد همواره باید به یاد داشته باشیم همان‌گونه که اگر ما چشمانمان را ببندیم، خورشید نیست و نابود

1. innern Bildern (mental pictures) 2. Hundert (hundred)

3. zufällig (incidental) 4. seelischen (mental) 5. leiblichen (physical)

6. Gedachtwerden (to be thought) 7. Wahrheit (truth)

نمی‌گردد، یک گزاره نیز هنگامی که ما به آن نمی‌اندیشیم، از صادق بودن ساقط نمی‌شود. در غیر این صورت، لازم می‌شود برای اثبات قضیه فیثاغورس به محتوای فاسفر مغرمان توجه داشته باشیم، و نیز ستاره‌شناسان در مورد بسط نتایج کارشان به زمان‌های قبل احتیاط خواهند کرد، از ترس این‌که مبدا با اعتراض‌هایی از این دست مواجه شوند: شما ۲ ضربدر ۲ را ۴ حساب می‌کنید، اما تصور عدد برای خود سیر تکامل و تاریخی دارد! ممکن است تردید داشت که تا آن زمان چنان تصویری آن اندازه پیشرفت کرده باشد. آن‌ها چگونه می‌توانند مطمئن باشند که گزاره $2 \times 2 = 4$ در آن زمان‌های دور وجود داشته است؟ آیا ممکن نیست قبلاً موجوداتی به گزاره $2 \times 2 = 5$ معتقد بوده‌اند و گزاره $2 \times 2 = 4$ بعدها در نتیجه فرایند انتخاب طبیعی در تنازع برای بقا، از آن تکامل یافته باشد؟ آیا به همین نحو ممکن نیست سرنوشت $2 \times 2 = 4$ این باشد که به $2 \times 2 = 3$ تکامل یابد؟ *Est modus in rebus, sunt certi* (در هر چیزی میانه‌ای هست، و نیز حد و مرزی معین!)^۱ نگرش تاریخی که به شدن چیزها گوش می‌سپارد و از نحوه شدن آن‌ها در جستجوی شناخت ماهیت آن‌هاست، به یقین مزیت‌های زیادی دارد، اما محدودیت‌هایی نیز دارد. اگر همه چیز پیوسته در تغییر می‌بود و هیچ چیزی نبود که برای همیشه ثابت باشد، آن‌گاه شناخت جهان ناممکن می‌بود و همه چیز در ابهام فرو می‌رفت. آدمی چنین می‌اندیشد که مفاهیم به نظر آن‌چنان در ذهن شکل می‌گیرند که برگ‌ها بر شاخه‌های درختان، یعنی گمان می‌کنیم می‌توانیم ماهیت آن‌ها را با مطالعه سرچشمه‌شان بشناسیم و می‌کوشیم آن‌ها را از طریق طبیعت ذهن انسان، به نحو روان‌شناختی توضیح دهیم. اما چنین برداشتی همه چیز را سوپرژکتیو^۲ می‌کند و، اگر تا آخر آن را دنبال کنیم، حقیقت را از میان خواهد برد. آنچه

1. Horace 'Satires' I. 1. 106. 2. Subjective (subjective)

را تاریخِ مفاهیم می‌خوانیم، در واقع یا تاریخِ دانش ما از مفاهیم است یا تاریخِ دانش ما از دلالت و اژه‌ها. اغلب اوقات صرفاً پس از تلاش عقلانی فراوان است — که ممکن است قرن‌ها طول بکشد — که بشر سرانجام در حصول دانشی از یک مفهوم به صورتی محض، یعنی درگشودن لفافه‌های اضافی که آن را از چشم ذهن پنهان می‌دارند، کامیاب می‌شود. اکنون چه باید گفت آن‌گاه که کسانی به جای پیش بردن این تکلیف که هنوز کامل نیست، آن را خوار می‌شمارند، به مهد کودک می‌روند یا تا دورترین مراحل قابل تصورِ تکامل بشر به عقب برمی‌گردند تا در آن‌جا، همچون جان استوارت میل،^۱ چیزی همچون علم حسابِ کیکی یا سنگریزه‌ای^۲ کشف کنند. فقط همین می‌ماند که برای خوش طعم شدن این کیک، یک دلالت خاص از مفهوم عدد را نیز بیفزاییم. چنین روشی کاملاً مخالف روش عقلانی است، و تا آن‌جا که ممکن است غیرریاضیاتی. عجیب نیست که ریاضیدانان نمی‌خواهند چیزی دربارهٔ آن بدانند! به جای یافتن محضیت^۳ ویژهٔ هر مفهوم، آن‌گاه که گمان می‌کنیم به سرچشمهٔ آن‌ها نزدیک شده‌ایم، می‌بینیم که همه چیز همچون مه نامتمایز و ناپیداست. گویی کسی بخواهد برای شناختن آمریکا، خود را به جای کریستف کلمب بگذارد و به زمانی بازگردد که او نخستین نگاه مرددش را بر آنچه هند می‌پنداشت انداخت. البته چنین مقایسه‌ای چیزی را اثبات نمی‌کند، اما امیدوارم دیدگاه من را روشن‌تر سازد. شاید در بسیاری از موارد، تاریخ نخستین اکتشاف‌ها، جهت مهیا شدن برای تحقیقات بیشتر، مطالعهٔ مفیدی باشد، اما نباید بنا باشد جای آن‌ها را بگیرد.

از منظر ریاضیدانان، مقابله با چنین دیدگاهی به‌ندرت ضروری بوده

1. John Stuart Mill

2. Pfefferkuchen- oder Kieselstein- arithmetik (gingerbread or pebble arithmetic)

3. Reinheit (purity)

است؛ اما من مباحثم را به گونه‌ای مطرح کرده‌ام تا فلاسفه نیز تا جایی که ممکن است متوجه مسائل موجود بشوند، تا آن‌جا که ناچار شدم اندکی هم وارد مباحث روان‌شناسی بشوم؛ البته صرفاً برای جلوگیری از تعرض آن به ریاضیات.

از این گذشته، گاهی حتی در کتب مرجع ریاضیات نیز تمایل به سمت روان‌شناسی دیده می‌شود. هنگامی که نویسنده‌ای خود را ملزم به ارائه تعریفی می‌بیند، اما از توان او خارج است، به این سمت گرایش پیدا می‌کند که دست‌کم راه رسیدن به برابری یا مفهوم مورد نظر را شرح دهد. تشخیص چنین مواردی آسان است، زیرا در ادامه بحث دیگر به چنین توضیحاتی بر نمی‌گردند. به یقین استفاده از ابزار مقدماتی برای اهداف آموزشی بلاشکال است، اما باید آن‌ها را به طور دقیق از تعاریف متمایز کرد. یک نمونه جالب را از نحوه‌ای که حتی ریاضیدانان نیز ممکن است مبانی برهان را با شرایط درونی یا بیرونی لازم برای ارائه آن برهان خلط کنند، می‌توان نزد ای. شرودر^۱ یافت،* آن‌جا که تحت عنوان «اصل موضوعه ویژه»^۲ می‌نویسد: «اصلی را که در ذهن من است می‌توان به‌خوبی اصل موضوعه ثبات نشانه^۳ خواند. این اصل به ما تضمین می‌دهد که در طول استدلال‌ها و استنتاج‌هایمان، نشانه‌ها در حافظه ما و به نحوی ثابت‌تر بر روی کاغذ باقی می‌مانند.» و الی آخر.

هرچه ریاضیات بیشتر همپاری از سوی روان‌شناسی را رد کند، بیشتر بر وابستگی نزدیکی به منطق صحه خواهد گذاشت. من تا آن‌جا پیش می‌روم که با آن‌هایی که معتقدند تمایز دقیقی میان این دو وجود ندارد موافقت کنم. همه در این مورد اتفاق نظر دارند که هر پژوهشی درباره

1. E. Schröder * *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, [Leipzig 1873].

2. Einziges Axiom (Special Axiom)

3. Axiom der Inhärenz der Zeichen (Axiom of Symbolic Stability)

اعتبار یک برهان یا توجیه یک تعریف باید امری مربوط به منطق باشد. اما چنین پژوهش‌هایی را نمی‌توان به سادگی از ریاضیات حذف کرد، زیرا فقط با پاسخ دادن به آن‌هاست که به یقینی که برایمان ضروری است خواهیم رسید.

در این مسیر نیز من احتمالاً بیش از آنچه معمول است پیش خواهم رفت. بیشتر ریاضیدانان، در پژوهش‌هایی از این دست، پس از برطرف شدن نیازهای اولیه‌شان، احساس خشنودی می‌کنند. اگر یک تعریف ابایی از داخل شدن در براهین نداشته باشد، اگر به هیچ تناقضی برخورد نکنیم، اگر همبستگی میان موضوع‌های به ظاهر دور از هم آشکار گردد، و اگر بدین ترتیب نظم و قاعده‌مندی بیشتری حاصل شود، در این صورت معمول است که تعریف را به اندازه کافی استوار بدانند و پرسش‌های اندکی درباره توجیه منطقی^۱ آن مطرح خواهد شد. چنین فرایندی دست‌کم این مزیت را دارد که به سادگی هدف خود را کاملاً از دست نمی‌دهیم. من نیز موافقم که تعاریف باید اعتبارشان را با ثمربخش بودنشان، یعنی از طریق امکان پیش بردن برهان‌ها توسط آن‌ها، ثابت کنند. اما باید توجه داشته باشیم که حتی اگر هیچ اتصالی میان زنجیره استنتاج‌ها مفقود نباشد، تا زمانی که توجیه تعاریف فقط به کمک این اندیشه ثانوی است که با هیچ تناقضی برخورد نکرده‌ایم، قوت برهان توهمی بیش نخواهد بود. با چنین طرقی، از اساس صرفاً به یقینی تجربی خواهیم رسید و باید به راستی آماده باشیم تا سرانجام بار دیگر با تناقضی روبه‌رو شویم که تمام برساخته‌هایمان را نابود سازد. به همین دلیل لازم دیده‌ام اندکی بیش از آنچه احتمالاً اغلب ریاضیدانان ضروری می‌دانند، در مبانی کلی منطقی به عقب بازگردم.

1. logischen Rechtfertigung (logical justification)

در پژوهشی که در پیش گرفته‌ام، به این اصول بنیادی پایبند بوده‌ام:
 (الف) همواره میان امر روان‌شناختی و امر منطقی، و همچنین میان امر
 سوبژکتیو و امر اُبژکتیو، تمایز دقیقی قائل باشم.
 (ب) هرگز از دلالت یک واژه به طور مجزا پرسش نکنم، بلکه فقط در
 متن یک گزاره جویای آن باشم.

(ج) همواره تمایز میان برابریستا و مفهوم را در نظر داشته باشم.
 مطابق اصل نخست، کلمه *Vorstellung* [تصور] را همواره در معنایی
 روان‌شناختی به کار برده‌ام و میان تصورات، مفاهیم و برابریستاها تمایز
 نهاده‌ام. اگر به اصل دوم توجه نداشته باشیم، تقریباً ناچار خواهیم شد
 تصاویر ذهنی یا کنش‌های یک ذهن خاص را به عنوان دلالت واژه‌ها
 بگیریم و به این ترتیب اصل نخست را نقض کنیم. بر اساس اصل سوم،
 فرض اُبژه شدن یک مفهوم، بدون این‌که تغییری کرده باشد، توهمی بیش
 نیست. از همین نکته، غیرقابل دفاع بودن نظریه فرمالیستی رایج دربارهٔ
 اعداد کسری، منفی و غیره مشخص می‌شود. در نوشتار کنونی به
 چگونگی اصلاح این دیدگاه اشاره‌ای خواهم داشت. در تمامی این
 موارد، همانند اعداد صحیح مثبت، مسئله معین کردن دقیق معنای یک
 این‌همانی است.

فکر می‌کنم، دست‌کم در اصول اساسی، ریاضیدانان با نتایجی که من
 گرفته‌ام موافق باشند، اگر قبول زحمت کنند و دایلم را مد نظر قرار دهند.
 به نظر من آن‌ها را همه‌جا می‌توان یافت و هر کدام را نیز به‌تنهایی، یا
 دست‌کم چیزی شبیه آن‌ها را پیش‌تر دیگران مطرح کرده‌اند؛ اما با آن
 پیوستگی که در این‌جا دارند، ممکن است همچنان تازه به نظر برسند.
 گاهی اوقات در شگفت شده‌ام که چگونه تفاسیری که در یک نقطه بسیار
 به دیدگاه من نزدیک شده‌اند، در نقطه‌ای دیگر آن‌قدر از آن دور بوده‌اند.
 اقبال فلاسفه به این دیدگاه‌ها، بسته به مواضع مختلف آن‌ها، متفاوت

خواهد بود، اما احتمالاً آن تجربه گرایانی که استقرا^۱ را یگانه طریق اصلی استنتاج (و در حقیقت نه فرایند استنتاج، بلکه فرایند عادت) می دانند، کمتر از دیگران آن‌ها را بپسندند. شاید کسی پیدا شود و از این فرصت استفاده کند و مبانی نظریه شناخت خود را مجدداً بررسی نماید. باید به آن‌هایی که تمایل دارند تعاریف من را غیرطبیعی^۲ بدانند بگویم که پرسش در این جا طبیعی بودن نیست، بلکه این است که آیا این تعاریف به عمق مطلب نفوذ می کنند و آیا از لحاظ منطقی قابل نقد هستند یا خیر. من به خود این امیدواری را می دهم که حتی فلاسفه نیز در این کتاب، در صورت بررسی بدون پیش داوری آن، چیزهایی مفید بیابند.

1. Induction (induction) 2. unnatürlich (unnatural)

بند ۱. پس از آن‌که ریاضیات برای مدتی طولانی خود را از فرسختی^۱ اقلیدسی دور نگه داشته بود، اکنون بار دیگر به سوی آن بازگشته است و حتی تلاش می‌کند از آن فراگذرد. در علم حساب، از آنجایی که بسیاری از مفاهیم و روش‌های منشأ هندی داشته‌اند، در برابر هندسه که بیشتر یونانی‌ها آن را شکل داده‌اند، معمولاً طریقهٔ اندیشیدن فرسختی کمتری داشته است. حاصل کشف تحلیل عالی^۲ صرفاً نشان دادن این بود که از یک سو پرداختن سفت و سخت به این آموزه با مسائل و مشکلاتی مهم و تقریباً لاینحل روبه‌روست، در حالی که از سوی دیگر به نظر نمی‌رسید کوشش برای غلبه بر آن‌ها سود چندانی نصیب ما کند. اما بسط بیشتر این موضوع‌ها با وضوح بیشتری به ما فهماند که در ریاضیات باوری صرفاً اخلاقی، متکی بر بسیاری کاربردهای موفق، کفایت نمی‌کند. برای بسیاری چیزها که پیش‌تر بدیهی به نظر می‌رسیدند، اکنون برهانی مورد نیاز است. بدین نحو برای نخستین بار حدود اعتبار [یک گزاره] در برخی

1. Strenge (rigour) 2. höhern Analysis (higher analysis)

موارد معین شده‌اند. آشکار شده است که مفاهیم تابع،^۱ پیوستگی،^۲ حد^۳ و بی‌نهایت^۴ به تعاریف دقیق‌تری نیاز دارند. اعداد منفی و گنگ،^۵ که مدت‌ها در علم پذیرفته شده بودند، باید از جهت اعتبارشان جدی‌تر بررسی شوند.

پس در همه‌جا تلاش‌هایی مشابه برای ارائه برهان قوی، تعیین دقیق حدود اعتبار، و تعریف روشن مفاهیم برای دستیابی به این دو هدف قابل مشاهده است.

بند ۲. در پیمودن این طریق، سرانجام به مفهوم عدد^۶ و^(۴) و ساده‌ترین گزاره‌های معتبر راجع به اعداد صحیح مثبت برخورد خواهیم خورد، که سازنده مبنای تمامی علم حساب هستند. البته فرمول‌هایی عددی^۷ همچون $۱۲ = ۵ + ۷$ و قوانینی همچون قانون شرکت‌پذیری جمع^۸ آن‌چنان از طریق کاربردهای بی‌شمار روزمره‌شان تثبیت شده‌اند که به نظر خنده‌آور می‌رسد تا با تقاضای ارائه برهانی برای آن‌ها برخورد خواهیم کرد. موردشان مناقشه کنیم. اما این نکته در بنیان ریاضیات قرار دارد که هر کجا امکان اثبات^۹ وجود دارد، بر تأیید^{۱۰} از طریق استقرا ترجیح داده شود. اقلیدس برای موارد بسیاری که همه بی‌دلیل از او می‌پذیرفتند، برهان

1. Function (function) 2. Stetigkeit (continuity) 3. Grenze (limit)

4. Unendlichen (infinity) 5. Irrationalzahl (irrational numbers)

۶. واژه Anzahl در زبان آلمانی دارای معانی مختلفی است از جمله: عدد، تعداد، کمیت، گروه و غیره. از آنجایی که اعداد مورد بررسی فرگه در ابتدا اعداد صحیح مثبت می‌باشند که در پاسخ به پرسش «چند تا؟» می‌آیند، می‌توانستیم این واژه را «تعداد» یا «عدد اصلی» ترجمه کنیم. اما به پیروی از مترجم انگلیسی آن را به «عدد» برگردانده‌ایم و برای نشان دادن تفاوت آن با Zahl، آن را به صورت سیاه (بولد) نوشته‌ایم.

7. Zahlformeln (numerical formulae)

8. Associativität bei der Addition (Associative Law of Addition)

9. Beweis (proof) 10. Bewährung (confirmation)

آورده است. با راضی نبودن از میزان فرسختی اقلیدسی بود که این الزام پیش آمد تا به سمت پژوهش‌هایی در باب اصل توازی^۱ کشیده شویم. بدین ترتیب حرکت ما در راستای بیشترین فرسختی ممکن، به انحای گوناگون از نیازی که در آغاز احساس شد فراگذاشته و شدت و گستره‌اش همواره رو به رشد بوده است.

هدف اثبات تنها این نیست که صدق گزاره‌ای را ورای هر شک و تردیدی قرار دهد، بلکه همچنین بنا دارد تا به ما بینشی در مورد وابستگی حقایق به یکدیگر اعطا کند. پس از آن‌که در نتیجه تلاش‌های ناموفق، قانع شدیم که یک تخته‌سنگ را نمی‌توانیم جابه‌جا کنیم، این پرسش بر جای می‌ماند که چه چیزی به آن چنین تکیه‌گاه مطمئنی می‌دهد؟ هر چقدر این پژوهش‌ها را پیش‌تر می‌بریم، از تعداد حقایق آغازینی^۲ که همه‌چیز را به آن‌ها برمی‌گردانیم کاسته می‌شود؛ و این ساده‌سازی هدفی است که فی‌نفسه ارزش پیگیری دارد. اما شاید به دلایلی بتوان انتظاراتی بیش از این داشت: این‌که با آگاهی یافتن از آنچه انسان در موارد ساده به طور غریزی انجام می‌دهد و استخراج آنچه اعتبار عام دارد، بتوان به روش‌های کلی ساخت مفاهیم^۳ و استدلال^۴ دست یافت، که قابل تعمیم به موارد پیچیده‌تر هستند.

بند ۳. انگیزه‌هایی فلسفی نیز بوده‌اند که من را برای انجام دادن چنین پژوهش‌هایی مصمم کرده‌اند. در این‌جا باید به پرسش از پیشینی یا پسینی^۵ بودن و تألیفی یا تحلیلی^۶ بودن ماهیت حقایق حسابی پاسخ داده شود. زیرا اگرچه این مفاهیم خود به فلسفه تعلق دارند، اما معتقدم که

-
1. Parallelenaxiom (Axiom of Parallels)
 2. Urwahrheiten (primitive truths)
 3. Begriffsbildung (forming concepts)
 4. Begründung (establishing principles)
 5. apriorischen oder aposteriorischen (a priori or aposteriori)
 6. synthetischen oder analytischen (synthetic or analytic)

اتخاذ تصمیمی دربارهٔ آن‌ها بدون کمک ریاضیات ممکن نیست. البته این به معنایی بستگی دارد که ما از این پرسش‌ها مراد می‌کنیم.

رویهٔ معمول این است که ما ابتدا به محتوای یک گزاره دست پیدا می‌کنیم و سپس از راه‌های صعب‌العبور دیگر در پی یافتن اثبات قاطع می‌گردیم، که به واسطهٔ آن آشنایی دقیق‌تری با شرایط اعتبار^۱ نیز پیدا می‌کنیم. پس به طور کلی باید بین این پرسش که چگونه به محتوای یک حکم دست پیدا می‌کنیم، و این پرسش که ملاک درستی^۲ اظهار ما از کجا می‌آید، تمایز قائل شویم.

تمایز میان پیشینی و پسینی، تألیفی و تحلیلی، به عقیدهٔ من* نه به محتوای حکم، بلکه به ملاک درستی حکم کردن^۳ مربوط می‌شود. اگر چنین ملاکی در دست نباشد، امکان تمیز دادن هم وجود نخواهد داشت. یک خطای پیشینی همان اندازه مهمل است که یک مفهوم آبی. هنگامی که کسی گزاره‌ای را - به آن معنایی که من مراد می‌کنم - پسینی یا تحلیلی می‌خواند، چنین نیست که دربارهٔ آن شرایط روان‌شناختی، فیزیولوژیکی و فیزیکی حکم کند که شکل‌گیری محتوای آن حکم را در آگاهی ممکن کرده‌اند، و همچنین حکمی دربارهٔ این نیست که چگونه کسی دیگر، هرچند شاید به غلط، به این نتیجه رسیده که آن گزاره را صادق بدانند؛ بلکه حکمی است دربارهٔ آن بنیان اساسی که ملاک ما برای صادق انگاشتن گزاره بر آن استوار است.

بنابراین، پرسش مذکور از قلمرو روان‌شناسی گرفته شده و به قلمرو ریاضیات - اگر موضوع یک حقیقت ریاضیاتی است - داده می‌شود. حال

1. Gültigkeit (validity) 2. Berechtigung (justification)

* من در این جا قصد ندارم معنایی جدید به این اصطلاحات بدهم، بلکه فقط به نحو دقیق‌تری آنچه را نویسندگان پیشین به‌ویژه کانت از آن‌ها مراد می‌کردند بیان می‌دارم.

3. Berechtigung zur Urtheilsfällung (justification for making the judgement)

مسئله پیدا کردن اثبات و پیگیری آن تا حقایق نخستین است. اگر در این مسیر فقط با قانون‌های منطقی کلی و تعاریف مواجه شویم، آنگاه با حقیقتی تحلیلی روبه‌رو هستیم، البته با توجه داشتن به این مطلب که باید آن گزاره‌هایی را که مقبولیت هر تعریف به آن‌ها وابسته است در نظر داشته باشیم. اما هنگامی که ارائه یک اثبات، بدون بهره‌گیری از یک دسته حقایق که ماهیت کلی منطقی ندارند، بلکه متعلق به قلمرو علوم خاصی هستند، ممکن نباشد، آنگاه گزاره ما تألیفی خواهد بود. برای آن‌که حقیقتی از نوع پسینی باشد، لازم است اقامه اثبات برای آن بدون کمک امور واقع^۱ – یعنی حقایق اثبات‌ناپذیر غیرکلی که شامل اظهاری دربارهٔ برابریست‌هایی معین هستند – امکانپذیر نباشد. اما برخلاف این، اگر اقامه اثبات صرفاً با استفاده از قوانین کلی – که خودشان نه اثبات‌پذیرند و نه به اثبات نیاز دارند – امکانپذیر باشد، آن حقیقت پیشینی خواهد بود.*

بند ۴. با آغاز کردن از چنین پرسش‌های فیلسوفانه‌ای به مطالبه‌ای همانند می‌رسیم که به صورت مستقل در قلمرو ریاضیات مطرح می‌شود و آن این‌که: گزاره‌های بنیادی علم حساب، اگر اساساً ممکن باشد، باید با بیشترین فرسختی اثبات شوند؛ زیرا تنها در صورتی که شکاف‌های میان زنجیره‌های استنتاج با بیشترین دقت از میان برداشته شوند، می‌توان به یقین گفت که اثبات بر کدام حقایق نخستین استوار است؛ و فقط با علم به این مطلب است که می‌توانیم برای پرسش‌هایمان پاسخی بیابیم.

1. Thatsachen (facts)

* اگر ما بتوانیم وجود حقایق کلی را تشخیص بدهیم، باید همچنین وجود چنین قوانین اولیه‌ای را هم قبول داشته باشیم، زیرا بدون کمک قانون کلی، از حقایق جزئی هیچ نتیجه‌ای حاصل نمی‌گردد. استقرا خود وابسته به این گزاره کلی است که روش استقرایی صدق یک قانون یا حداقل احتمال آن را محقق می‌کند. اگر منکر این باشیم، استقرا چیزی بیش از یک پدیدار روان‌شناختی نخواهد بود و صرفاً فرایندی خواهد بود که به ما تلقین می‌کند تا به صدق گزاره‌ای باور داشته باشیم، بدون این‌که هیچ توجیهی برای آن باور ارائه دهد.

حال اگر بخواهیم این مطالبه را برآورده کنیم، به زودی به گزاره‌هایی برمی‌خوریم که تا هنگامی که تحلیل مفاهیم موجود در آن‌ها به مفاهیم ساده‌تر یا فروکاستن آن‌ها به چیزی کلی‌تر برایمان مقدور نباشد، اثبات آن‌ها امکان‌ناپذیر است. در این جا مقدم بر همه عدد است که یا باید تعریف شود یا به عنوان تعریف‌ناپذیر شناخته شود. تکلیف این کتاب باید همین باشد.* تصمیم‌گیری راجع به ماهیت قوانین حسابی به نتایجی بستگی دارد که در این کتاب به آن‌ها خواهیم رسید.

پیش از آن‌که به خود پرسش‌ها بپردازم، چند نکته را به عنوان مقدمه خواهم آورد که می‌توانند راهنمای خوبی برای رسیدن به پاسخ‌ها باشند. مثلاً اگر از دیدگاهی دیگر، دلایلی وجود داشته باشند که اصول بنیادی علم حساب تحلیلی‌اند، آنگاه این نظر به معنای قبول اثبات‌پذیری و تعریف‌پذیری مفهوم عدد خواهد بود. در حالی که طرف مقابل دلایلی برای پسینی بودن آن‌ها خواهد داشت. از این رو، در این جا نخست این دیدگاه‌های متنازع به صورت گذرا توضیح داده می‌شوند.

بخش اول: دیدگاه‌های چند نویسنده دربارهٔ ماهیت گزاره‌های حسابی

آیا فرمول‌های عددی اثبات‌پذیرند؟

بند ۵. ما باید میان فرمول‌های عددی که همچون $۳ + ۲ = ۵$ برای اعداد خاصی برقرارند، و قوانین کلی که برای همهٔ اعداد صحیح معتبرند، تمایز بنهیم.

* در مباحث پیش رو، تنها اعداد مورد بررسی، اعداد صحیح مثبت می‌باشند که به پرسش «چند تا؟» پاسخ می‌دهند، مگر این‌که در موارد خاص غیر از این گفته شده باشد.